I - Division euclidienne

A - Multiples et diviseurs

Définition a est un entier naturel et b est un entier naturel non nul

Si $a = b \times k$ (ou $a \div b = k$) où k est un entier naturel alors :

- **a est un multiple de b**
- ou **a est divisible par b**
- ou **b est un diviseur de a**
- ou **b divise a**.

Exemple : 1 739 est-il un multiple de 47 ? 1 980 est-il divisible par 88 ?

1 739 ÷ 47 = 37 donc 1739 = 47 × 27.
1 739 est donc un multiple de 47 (et de 27).
On dit également que :

- **1 739 est divisible par 47** (et par 27) ;
- **47 est un diviseur de 1 739**(et 27 aussi) ;
- **47 divise 1 739** (27 divise aussi 1 739).

1 980 ÷ 88 = 22,5.
22,5 n'est pas un entier naturel donc 1 980 n'est pas divisible par 88.

On peut dire également que :

- 88 n'est pas un diviseur de 1 980 ;
- 1 980 n'est pas un multiple de 88.

B - Division euclidienne

Définition a est un entier naturel et b est un entier naturel non nul

a	b
r	q

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux entiers naturels q et r tels que :

$a = b \times q + r$ avec $r < b$ où q est le **quotient** (entier) et r le **reste** de la division euclidienne.

Exemple : a. Effectue la division euclidienne de 293 par 34.
b. 379 = 7 × 53 + 8 : quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

a.

293	34
21	8

On peut donc écrire :
293 = 34 × 8 + 21
avec 21 < 34.

b. 8 < 53 mais 8 > 7 donc l'égalité représente la division euclidienne de 379 par 53 mais ne peut pas représenter celle de 379 par 7.

II - PGCD de deux entiers naturels

Définition

Le **PGCD de deux entiers naturels non nuls** est leur Plus Grand Diviseur Commun.

Remarques :
- a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors PGCD(a ; b) = b.
- a et b étant des entiers naturels, PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a).

Théorème — a et b sont deux entiers naturels non nuls

Si $a \geqslant b$ alors PGCD(a ; b) = PGCD(b ; $a - b$).

Exemple 1 : Détermine PGCD(539 ; 385) par la **méthode des soustractions successives**.

- 539 > 385 et 539 − 385 = 154 donc PGCD(539 ; 385) = PGCD(385 ; 154).
- On cherche maintenant PGCD(385 ; 154) : on applique à nouveau la propriété.
385 > 154 et 385 − 154 = 231 donc PGCD(385 ; 154) = PGCD(154 ; 231)= PGCD(231 ; 154).
- On poursuit avec 231 et 154 et ainsi de suite :
231 > 154 et 231 − 154 = 77 donc PGCD(231 ; 154) = PGCD(154 ; 77).
- Or 77 est un diviseur de 154 (154 = 77 × 2) donc PGCD(154 ; 77) = **PGCD(539 ; 385) = 77**.

Théorème — a et b sont des entiers naturels non nuls

Si $a \geqslant b$ alors PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Remarque : Dans cet algorithme, appelé aussi « algorithme d'Euclide », le PGCD est le dernier reste non nul.

Exemple 2 : Trouve le PGCD de 918 et de 136 par la **méthode des divisions successives**.

- On effectue la division euclidienne de 918 par 136 : 918 = 136 × 6 + 102.
Donc PGCD(918 ; 136) = PGCD(136 ; 102).

918	136
102	6

- On cherche maintenant PGCD(136 ; 102) : on applique à nouveau la propriété.
On effectue la division euclidienne de 136 par 102 : 136 = 102 × 1 + 34.
Donc PGCD(136 ; 102) = PGCD(102 ; 34).

136	102
34	1

- On continue avec PGCD(102 ; 34).
On effectue la division euclidienne de 102 par 34 : 102 = 34 × 3.
Le reste est égal à **0** donc **PGCD(918 ; 136) = 34** qui est le dernier reste non nul.

102	34
0	3

III - Fractions irréductibles

Définition

Deux **entiers naturels non nuls sont premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1.
Autrement dit, 1 est le seul diviseur commun à ces deux entiers naturels.

Exemple 1 : Démontre que 45 et 182 sont premiers entre eux.

- $45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$ — Les diviseurs de 45 sont : **1** ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 et 45.
- $182 = 2 \times 91 = 2 \times 7 \times 13$ — Les diviseurs de 182 sont : **1** ; 2 ;7 ; 13 et 91.

1 est le seul diviseur commun à 45 et 182 ainsi le PGCD de 45 et 182 est égal à **1**.
On en déduit donc que **45 et 182 sont premiers entre eux**.

Exemple 2 : 566 et 14588 sont-ils premiers entre eux ?

566 et 14588 sont tous les deux **divisibles par 2**, ils ont donc un diviseur commun autre que 1 : leur **PGCD n'est pas égal à 1**. Ainsi **566 et 14588 ne sont pas premiers entre eux**.

Définition

Une **fraction est irréductible** quand son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**.

Exemple 3 : Rends les fractions $\frac{90}{105}$; $\frac{396}{360}$ et $\frac{136}{918}$ irréductibles.

90 et 105 sont des multiples de 5 donc, on obtient :

$$\frac{90}{105} = \frac{18 \times \cancel{5}}{21 \times \cancel{5}} = \frac{18}{21}$$

18 et 21 sont des multiples de 3 donc, on obtient :

$$\frac{18}{21} = \frac{6 \times \cancel{3}}{7 \times \cancel{3}} = \frac{6}{7}$$

Ainsi $\frac{90}{105} = \frac{6}{7}$.

On écrit 396 et 360 sous la forme de produits de facteurs les plus petits possibles.

$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ donc :

$$\frac{396}{360} = \frac{2^{\cancel{2}} \times 3^{\cancel{2}} \times 11}{2^3 \times 3^{\cancel{2}} \times 5} = \frac{11}{2 \times 5}$$

Ainsi $\frac{396}{360} = \frac{11}{10}$.

Le PGCD de 136 et 918 est 34.

34 est donc le plus grand entier naturel qui divise à la fois 136 et 918.

Les quotients obtenus sont nécessairement premiers entre eux.

$$\frac{136}{918} = \frac{34 \times 4}{34 \times 27} = \frac{4}{27}$$

Ainsi $\frac{136}{918} = \frac{4}{27}$.